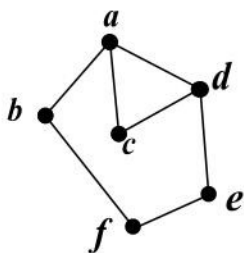


سؤالات آزمون نهایی درس: ریاضیات گسسته	ساعت شروع: ۱۰ صبح	نام و نام خانوادگی:	رشته: ریاضی و فیزیک
پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه	تعداد صفحه: ۲	تاریخ آزمون: ۱۴۰۲/۱۰/۱۹	مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه
دانش آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزاد داخل و خارج کشور در نوبت دی ماه سال ۱۴۰۲			

ردیف	سؤالات پاسخ برگ دارد. (استفاده از ماشین حساب ساده، با چهار عمل اصلی، مجاز است.)	نمره
------	--	------

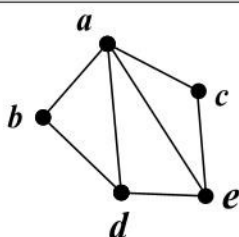
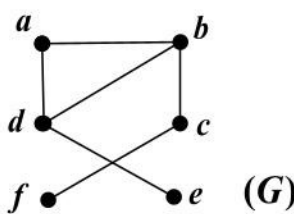
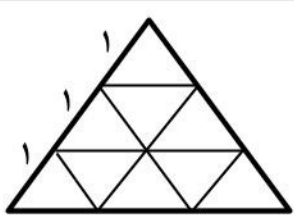
۱	جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید. الف) اگر k عددی صحیح باشد، باقی مانده تقسیم $300 - 19k$ بر ۱۹ برابر با است. ب) اگر a, b, c اعدادی طبیعی باشند که $a b$ و $b c$ ، در اینصورت حاصل عبارت $([a, b], [a, c])$ برابر است. پ) دو مربع لاتین 2×2 وجود و مربع لاتین 1×1 وجود دارد. ت) تعداد توابع یک به یک از مجموعه دو عضوی به مجموعه ۴ عضوی برابر می باشد.	۱/۲۵
۲	در هر یک از موارد زیر، گزاره درست را اثبات و گزاره نادرست را با ارائه مثال نقض، رد کنید. الف) با اضافه کردن یک واحد به حاصل ضرب دو عدد زوج متوالی، حاصل، مربع کامل است. ب) حاصل ضرب هر عدد گویا در عدد گنگ، همواره عددی گنگ است.	۱/۵
۳	در هر یک از سوالات زیر، گزینه مناسب را انتخاب کنید. الف) عدد 1402 به کدام دسته هم‌نهشتی به پیمانه ۷ تعلق دارد؟ ۱) [۵] ۲) [۲] ۳) [۰] ۴) [۱] ب) باقی مانده تقسیم عدد $(7^{100} - 3^{100} - 9^{100})$ بر ۱۴ کدام است؟ ۱) صفر ۲) ۳ ۳) ۵ ۴) ۸ پ) کدام یک از معادلات هم‌نهشتی زیر در مجموعه اعداد صحیح جواب ندارد؟ ۱) $6x \equiv 11 \pmod{9}$ ۲) $2x \equiv 3 \pmod{5}$ ۳) $5x \equiv 1 \pmod{3}$ ۴) $3x \equiv 1 \pmod{7}$	۰/۷۵
۴	ثابت کنید مجموع مربعات هر دو عدد حقیقی همواره از قرینه حاصل ضرب آنها کمتر نیست.	۱/۵
۵	اگر $a b$ و $b \neq 0$ ، در این صورت ثابت کنید: $ a \leq b $.	۱/۲۵
۶	رقم یکان عدد $A = 100! + 99! + 98! + \dots + 2! + 1!$ را به دست آورید.	۱/۵
۷	الف) مجموعه همسایگی بسته یک رأس در گراف را تعریف کنید. ب) در گراف شکل زیر همسایگی باز رأس d را بنویسید.	۱/۲۵



ادامه سوالات در صفحه دوم

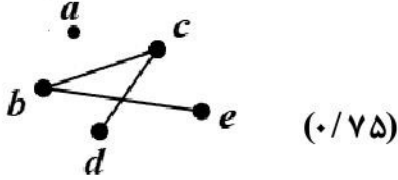
سؤالات آزمون نهایی درس: ریاضیات گسسته	ساعت شروع: ۱۰ صبح	نام و نام خانوادگی:	رشته: ریاضی و فیزیک
پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه	تعداد صفحه: ۲	تاریخ آزمون: ۱۴۰۲/۱۰/۱۹	مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه
دانش آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزاد داخل و خارج کشور در نوبت دی ماه سال ۱۴۰۲			

ردیف	سوالات پاسخ برگ دارد. (استفاده از ماشین حساب ساده، با چهار عمل اصلی، مجاز است.)	نمره
------	--	------

۸	مکمل گراف G که در شکل زیر آمده است را رسم کنید.	۰/۷۵										
۹	آیا می توان گرافی ۳-منتظم از مرتبه ۹ رسم کرد؟ برای پاسخ خود دلیل بیاورید.	۱										
۱۰	در گراف P_{10} چند مسیر به طول ۳ وجود دارد؟	۱										
۱۱	الف) با ذکر دلیل عدد احاطه گری گراف شکل زیر را تعیین کنید. ب) یک مجموعه احاطه گر مینیمال بنویسید که مینیمم نباشد. برای پاسخ خود دلیل ارائه دهید.	۲										
۱۲	مربع لاتینی بنویسید که با مربع لاتین زیر متعامد باشد و متعامد بودن آن را با ذکر دلیل بیان کنید.	۱/۲۵	<table border="1" data-bbox="263 1243 438 1400"> <tr><td>۱</td><td>۳</td><td>۲</td></tr> <tr><td>۲</td><td>۱</td><td>۳</td></tr> <tr><td>۳</td><td>۲</td><td>۱</td></tr> </table>	۱	۳	۲	۲	۱	۳	۳	۲	۱
۱	۳	۲										
۲	۱	۳										
۳	۲	۱										
۱۳	نشان دهید تعداد جواب های صحیح و مثبت معادله $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$ برابر با $\binom{n-1}{k-1}$ است.	۱/۲۵										
۱۴	با ارقام ۴،۴،۴،۱،۵،۶،۶ چند عدد ۷ رقمی می توان نوشت؟	۰/۷۵										
۱۵	یک مثلث متساوی الاضلاع را به طول ضلع ۳ واحد تقسیم بندی کرده ایم. نشان دهید اگر ۱۰ نقطه دلخواه از داخل این مثلث اختیار کنیم حداقل دو نقطه بین این نقاط وجود خواهد داشت به قسمی که فاصله آنها از یکدیگر کمتر از یک باشد.	۱/۲۵										
۱۶	به چند طریق می توان با استفاده از اصل شمول و عدم شمول، ۴ خودکار متفاوت را بین ۳ نفر توزیع کرد به شرط آن که به هر نفر حداقل یک خودکار داده باشیم.	۱/۷۵										
	"موفق باشید"	۲۰	جمع نمره									

راهنمای تصحیح آزمون نهایی درس: ریاضیات گسسته	رشته: ریاضی و فیزیک	ساعت شروع: ۱۰ صبح	مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه
پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه		تاریخ آزمون: ۱۴۰۲/۱۰/۱۹	
دانش آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزاد داخل و خارج کشور دی سال ۱۴۰۲			

ردیف	راهنمای تصحیح	نمره
------	---------------	------

۱	الف) ۴ (۰/۲۵) (مثال صفحه ۱۴) پ) ندارد (۰/۲۵) - یک (۰/۲۵) (کار در کلاس صفحه ۶۶) (ت) ۱۲ (۰/۲۵) (مثال صفحه ۷۹) ب) b (۰/۲۵) (قسمت الف کار در کلاس صفحه ۱۳)	۱/۲۵
۲	الف) درست (۰/۲۵). $(2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2k \times (2k+2) + 1 = 4k^2 + 4k + 1$ (۰/۵) ب) نادرست (۰/۲۵) با در نظر گرفتن صفر به عنوان عدد گویا (۰/۲۵) و انتخاب هر عدد گنگی، حاصل ضرب صفر است که گویا می شود. (۰/۲۵) (مشابه قسمت ج کار در کلاس صفحه ۳) (مشابه مثال آخر صفحه ۵)	۱/۵
۳	الف) گزینه ۲ (۰/۲۵) (مشابه سوال ۱ صفحه ۲۹) پ) گزینه ۱ (۰/۲۵) (مشابه مثال سوم صفحه ۲۵) ب) گزینه ۱ (۰/۲۵) (مشابه سوال ۸ صفحه ۲۹)	۰/۷۵
۴	الف) $a^2 + b^2 \geq -ab$ (۰/۲۵) $\Leftrightarrow a^2 + b^2 + ab \geq 0$ (۰/۲۵) $\Leftrightarrow 2a^2 + 2b^2 + 2ab \geq 0$ (۰/۲۵) (مثال ۳ صفحه ۷) ب) $a^2 + b^2 + (a^2 + b^2 + 2ab) \geq 0$ (۰/۲۵) $\Leftrightarrow a^2 + b^2 + (a+b)^2 \geq 0$ (۰/۲۵) (همواره برقرار)	۱/۵
۵	الف) $a b \Rightarrow b = aq, q \in Z$ (۰/۲۵) $\Rightarrow b = a q $ (۰/۲۵) ب) $q \in Z, q \neq 0 \Rightarrow q \geq 1$ (۰/۲۵) $\Rightarrow a q \geq a $ (۰/۲۵) $\Rightarrow b \geq a $ (۰/۲۵) (ویژگی ۴ صفحه ۱۱)	۱/۲۵
۶	$A = 2! + 4! + 6! + \dots + 100!$ $\Rightarrow A = 2! + 4! + 10k, k \in Z$ (۰/۲۵) (۰/۲۵) مضرب ۲ و ۵ $\Rightarrow A \equiv 2 + 24 + 0 \pmod{5} \Rightarrow A \equiv 26 \equiv 1 \pmod{5}$ (۰/۵) (مشابه سوال ۱۱ صفحه ۲۹)	۱/۵
۷	الف) مجموعه رأس هایی از یک گراف که به یک رأس متصل هستند به همراه خود رأس را مجموعه همسایگی بسته آن رأس می نامیم. (۰/۵) ب) $N_G(d) = \{a, c, e\}$ (۰/۷۵) (تعریف و مثال صفحه ۳۶)	۱/۲۵
۸	(مشابه مثال صفحه ۳۷)  (۰/۷۵)	۰/۷۵
۹	الف) خیر. (۰/۲۵) در یک گراف r -منتظم داریم $\sum_{i=1}^p \deg(v_i) = 2q$ به عبارتی $rp = 2q$ (۰/۲۵). در این سوال $r = 3, p = 9$ لذا $rp = 27$ عددی فرد و $2q$ عددی زوج است. (۰/۲۵) و این تناقض است. (۰/۲۵) (مشابه سوال ۸ صفحه ۴۲)	۱
۱۰	الف) P_n (تعریف مسیر و P_n صفحه ۳۸) ب) نوشتن مسیرها (۰/۵) ج) مسیر ۷ (۰/۲۵) 12345678910 $78910 - 6789 - 5678 - 4567 - 3456 - 2345 - 1234$ (۰/۲۵)	۱

ادامه پاسخ ها در صفحه دوم

راهنمای تصحیح آزمون نهایی درس: ریاضیات گسسته	رشته: ریاضی و فیزیک	ساعت شروع: ۱۰ صبح	مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه
پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه		تاریخ آزمون: ۱۴۰۲/۱۰/۱۹	
دانش آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزاد داخل و خارج کشور دی سال ۱۴۰۲			

ردیف	راهنمای تصحیح	نمره
------	---------------	------

۱۱	الف) طبق قضیه داریم $\gamma(G) \leq 2 = \left\lfloor \frac{6}{3+1} \right\rfloor$ (۰/۲۵). از طرفی مجموعه $D = \{d, c\}$ یک مجموعه احاطه گر است. (مشابه مثال صفحه ۴۹) لذا $\gamma(G) \leq 2$ (۰/۲۵). بنابراین $\gamma(G) = 2$ (۰/۲۵). ب) $D = \{a, f, e\}$ (۰/۲۵) دلیل آن که مجموعه احاطه گر مینیمال است: با حذف رأس a ، رأس a احاطه نمی شود. (۰/۲۵) با حذف رأس f ، رأس c احاطه نمی شود. (۰/۲۵) با حذف رأس e ، خود رأس e احاطه نمی شود. (۰/۲۵) (توجه: به سایر احاطه گرهای مینیمال غیر مینیمم، با ذکر دلیل نمره داده شود.) (مشابه قسمت ۴ کاردرکلاس صفحه ۴۶)	۲
۱۲	(مشابه سوال ۱۵ صفحه ۷۲) در مربع لاتین دوم عدد دو رقمی تکراری نداریم. بنابراین مربع لاتین ارائه شده با مربع لاتین مورد سوال متعامد هستند. (۰/۵) (توجه: به سایر مربع های لاتینی که شرایط مسأله را برقرار کنند، نمره داده شود.)	۱/۲۵
۱۳	به هر کدام از x_1, x_2, \dots, x_k عدد ۱- را اضافه می کنیم. (۰/۲۵) معادله جدید (۰/۵) $(x_1 - 1) + (x_2 - 1) + \dots + (x_k - 1) = n - k$ لذا تعداد حالات جواب از رابطه $\binom{n-1}{k-1} = \binom{n-k+k-1}{k-1}$ به دست می آید. (۰/۵) (کار در کلاس صفحه ۶۱)	۱/۲۵
۱۴	(مشابه مثال صفحه ۵۸) $\frac{7! (0/25)}{2! \times 3! (0/5)}$	۰/۷۵
۱۵	(کار در کلاس صفحه ۸۰) ۱۰ نقطه را کبوتر و هر یک از ۹ قسمت مثلث را لانه فرض می کنیم. (۰/۵) طبق اصل لانه کبوتری حداقل دو کبوتر در یک لانه جای می گیرند. (۰/۲۵) یعنی حداقل دو نقطه در یک مثلث کوچک قرار خواهند گرفت به طوری که $ AB < 1$. (۰/۵)	۱/۲۵
۱۶	(مثال صفحه ۷۷) $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$, $B = \{b_1, b_2, b_3\}$, $A_j = \{f : A \rightarrow B \mid f(a_i) \neq b_j, 1 \leq i \leq 4\}$, $1 \leq j \leq 3$ (۰/۲۵) $ S = 3^4 = 81$ (۰/۲۵), $ A_j = 2^4 = 16$ (۰/۲۵) $ A_1 \cap A_2 = A_1 \cap A_3 = A_2 \cap A_3 = 1$ (۰/۲۵), $ A_1 \cap A_2 \cap A_3 = 0$ (۰/۲۵) $ \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} = 81 - (3 \times 16 - 3 \times 1 + 0) = 36$ (۰/۵)	۱/۷۵

