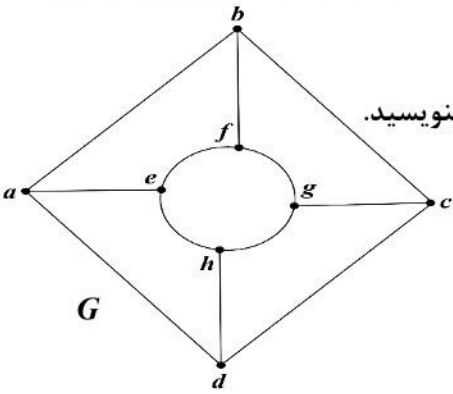


سؤالات آزمون نهایی درس: ریاضیات گسسته - ۱۲۰۷۱	پایه: دوازدهم	رشته: ریاضی و فیزیک	تاریخ آزمون: ۱۴۰۴/۱۰/۱۰
تعداد صفحه: ۲	مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه	ساعت شروع: ۱۰:۳۰ به وقت تهران	نام و نام خانوادگی:
دانش آموزان روزانه، بزرگسالان، آموزش از راه دور، ایثارگران و داوطلبان آزاد (داخل و خارج از کشور) - دی ۱۴۰۴		مرکز ارزشیابی و تضمین کیفیت نظام آموزش و پرورش Azmoon.medu.ir	
ردیف	سؤالات (پاسخ برگ دارد)		
نمره			

۱	<p>درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را تعیین کنید.</p> <p>الف) اگر n حاصل ضرب دو عدد طبیعی متوالی باشد، آنگاه $4n+1$ مربع کامل است.</p> <p>ب) اگر برای هر سه مجموعه دلخواه A, B و C داشته باشیم $A \cap B = A \cap C$ آنگاه $B = C$</p> <p>پ) اگر $a b$ آنگاه $[a, b] = a$ (کروشه نماد ک.م.م. است).</p> <p>ت) تعداد توابع یک به یک از مجموعه‌ای ۳ عضوی به مجموعه‌ای ۵ عضوی برابر ۱۰ است.</p>	۱
۰/۷۵	<p>جاهای خالی را با عبارت مناسب، کامل کنید.</p> <p>الف) حاصل $(-5, 0)$ برابر است. (پرانترز نماد ب.م.م. است).</p> <p>ب) باقی‌مانده تقسیم -43 بر ۸ برابر است.</p> <p>پ) عدد احاطه‌گری گراف P_5 برابر است.</p>	۲
۰/۷۵	<p>با برهان خلف ثابت کنید اگر α و β دو عدد گنگ و $\beta - 2\alpha$ عددی گویا باشد، آنگاه $3\alpha - \beta$ عددی گنگ است.</p>	۳
۱	<p>به روش بازگشتی ثابت کنید:</p> $xy + \frac{1}{y}(y^x + 1) \geq x(1-x)$	۴
۱	<p>ثابت کنید اگر از مربع هر عدد فرد، یک واحد کم کنیم، حاصل بر ۸ بخش پذیر است.</p>	۵
۱	<p>اگر a عددی اول باشد و $3a 4k+2$ و $3a 5k+1$ آنگاه مقدار a را بیابید.</p>	۶
۱	<p>جواب‌های عمومی معادله هم‌نهشتی $35x \equiv 50 - 2x$ را به دست آورید.</p>	۷
۱	<p>اگر ۲۵ خردادماه در یک سال یکشنبه باشد، ۱۰ آذرماه در همان سال چه روزی از هفته است؟</p>	۸
۲	<p>گراف G را در نظر بگیرید.</p> <p>الف) مجموعه $V(G)$ و اندازه گراف G را بنویسید.</p> <p>ب) مسیری به طول ۴ از a به b بنویسید.</p> <p>پ) دوری به طول ۵ بنویسید که از رأس c شروع شود.</p> <p>ت) اگر $N_G(x) = \{c, b, d\}$ باشد، آنگاه x چه رأس یا رأس‌هایی می‌تواند باشد؟</p> 	۹
۰/۷۵	<p>اگر در گراف G از مرتبه ۸، مجموع درجات ۴۰ باشد، تعداد یال‌های گراف مکمل G را به دست آورید.</p>	۱۰
۱	<p>اگر در یک گراف ۳-منتظم از مرتبه p و اندازه q داشته باشیم $p+q=20$ در این صورت مقدار p و q را بیابید.</p>	۱۱

سؤالات آزمون نهایی درس: ریاضیات گسسته - ۱۲۰۷۱	پایه: دوازدهم	رشته: ریاضی و فیزیک	تاریخ آزمون: ۱۴۰۴/۱۰/۱۰
تعداد صفحه: ۲	مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه	ساعت شروع: ۱۰:۳۰ به وقت تهران	نام و نام خانوادگی:
دانش آموزان روزانه، بزرگسالان، آموزش از راه دور، اینترگران و داوطلبان آزاد (داخل و خارج از کشور) - دی ۱۴۰۴		مرکز ارزشیابی و تضمین کیفیت نظام آموزش و پرورش Azmoon.medu.ir	
ردیف	سؤالات (پاسخ برگ دارد)		
نمره			

۱/۵	<p>گراف G را در نظر بگیرید.</p> <p>الف) عدد احاطه‌گری گراف G را با ذکر دلیل به دست آورید.</p> <p>ب) در گراف G یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال ۴ عضوی شامل رأس a بنویسید.</p> 	۱۲									
۰/۵	یک گراف از مرتبه ۵ با عدد احاطه‌گری ۳ رسم کنید.	۱۳									
۱ ۰/۷۵	<p>الف) محاسبه کنید ۸ نفر به چند طریق می‌توانند در یک اتاق ۴ نفره و دو اتاق ۲ نفره در یک هتل اسکان یابند؟</p> <p>ب) تعداد توابع پوشا از یک مجموعه ۵ عضوی به یک مجموعه ۳ عضوی را محاسبه کنید؟</p>	۱۴									
۱/۵	از بین ۵ نوع گل مختلف به چند طریق می‌توان یک دسته گل شامل ۸ شاخه گل انتخاب کرد به طوری که از گل نوع اول حداقل ۲ شاخه گل و از گل نوع پنجم فقط یک شاخه گل انتخاب شود؟	۱۵									
۱	<p>در مربع لاتین مقابل، مقادیر x، y، z و t را به دست آورید.</p> <table border="1" data-bbox="231 1198 422 1366"> <tr> <td>۳</td> <td>x</td> <td>y</td> </tr> <tr> <td>t</td> <td>۲</td> <td>z</td> </tr> <tr> <td>۲</td> <td>۳</td> <td>t</td> </tr> </table>	۳	x	y	t	۲	z	۲	۳	t	۱۶
۳	x	y									
t	۲	z									
۲	۳	t									
۱/۵	به کمک اصل شمول و عدم شمول تعیین کنید چند عدد طبیعی مانند n ، به طوری که $n \leq 600$ وجود دارد که بر هیچ یک از اعداد ۳ و ۷ بخش پذیر نباشند؟	۱۷									
۱	در یک دبیرستان، حداقل چند دانش‌آموز وجود داشته باشند تا مطمئن باشیم حداقل ۲۱ دانش‌آموز ماه تولدشان یکسان است؟	۱۸									
۲۰	جمع	موفق باشید									
صفحه ۲ از ۲											

۱	الف) درست صفحه ۳ (ب) نادرست صفحه ۳ (پ) نادرست صفحه ۱۳ (ت) نادرست صفحه ۷۸ هر قسمت (۰/۲۵)	۱
۰/۷۵	الف) ۵ صفحه ۱۳ (ب) ۵ صفحه ۱۴ (پ) ۴ صفحه ۵۲ هر قسمت (۰/۲۵)	۲
۰/۷۵	فرض کنیم $3\alpha - \beta$ عددی گویا باشد (۰/۲۵) داریم: با توجه به این که مجموع دو عدد گویا، عددی گویاست، پس α باید عددی گویا باشد (۰/۲۵) که با فرض مسأله در تناقض است. (۰/۲۵) صفحه ۸	۳
۱	$xy + \frac{1}{4}(y^2 + 1) \geq x(1-x) \Leftrightarrow \underbrace{2xy + y^2 + 1}_{(۰/۲۵)} \geq \underbrace{2x - 2x^2}_{(۰/۲۵)} \Leftrightarrow \underbrace{x^2 + 2xy + y^2 + x^2 + 1 - 2x}_{(۰/۲۵)} \geq 0$ $\Leftrightarrow \underbrace{(x+y)^2 + (x-1)^2}_{(۰/۲۵)} \geq 0$ عبارت حاصل بدیهی است و تمامی روابط برگشت پذیرند. (۰/۲۵) تذکر: اگر به جای عبارت "تمامی روابط برگشت پذیرند"، فلش‌های نتیجه‌گیری دوطرفه، رسم شده باشند (۰/۲۵) نمره تعلق گیرد. صفحه ۸	۴
۱	روش اول: $\underbrace{(2k+1)^2 - 1}_{(۰/۲۵)} = \underbrace{4k^2 + 4k + 1 - 1}_{(۰/۲۵)} = \underbrace{4k^2 + 4k}_{(۰/۲۵)} = \underbrace{4k(k+1)}_{(۰/۲۵)} = \underbrace{4(2q)}_{(۰/۲۵)} = 8q$ روش دوم: می‌دانیم هر عدد فرد را می‌توان به یکی از دو صورت $4k+1$ یا $4k+3$ نوشت، پس داریم: $\begin{cases} \underbrace{(4k+1)^2 - 1}_{(۰/۲۵)} = \underbrace{16k^2 + 8k + 1 - 1}_{(۰/۲۵)} = \underbrace{8k(2k+1)}_{(۰/۲۵)} = 8m \\ \underbrace{(4k+3)^2 - 1}_{(۰/۲۵)} = \underbrace{16k^2 + 24k + 9 - 1}_{(۰/۲۵)} = \underbrace{8(2k^2 + 3k + 1)}_{(۰/۲۵)} = 8n \end{cases}$ صفحه ۱۵	۵
صفحه ۱ از ۵		

روش اول:

$$\left. \begin{array}{l} 3a \mid 4k+2 \Rightarrow 3a \mid 20k+10 \\ 3a \mid 5k+1 \Rightarrow 3a \mid 20k+4 \end{array} \right\} \begin{array}{l} (0/25) \Rightarrow 3a \mid (20k+10) - (20k+4) \Rightarrow 3a \mid 6 \Rightarrow \underbrace{a \mid 2}_{(0/25)} \Rightarrow \underbrace{a=2}_{(0/25)} \\ (0/25) \end{array}$$

روش دوم:

$$\left. \begin{array}{l} 3a \mid 4k+2 \Rightarrow 4k \equiv -2 \pmod{3a} \Rightarrow 20k \equiv -10 \pmod{3a} \\ 3a \mid 5k+1 \Rightarrow 5k \equiv -1 \pmod{3a} \Rightarrow 20k \equiv -4 \pmod{3a} \end{array} \right\} (0/5) \Rightarrow \underbrace{6 \equiv 0 \pmod{3a}}_{(0/25)} \Rightarrow \underbrace{2 \equiv 0 \pmod{3a}}_{(0/25)} \Rightarrow \underbrace{a=2}_{(0/25)}$$

روش سوم:

$$\left. \begin{array}{l} 3a \mid 4k+2 \Rightarrow 4k+2 = 3aq_1 \xrightarrow{\times 5} 20k+10 = 3aq_1 \\ 3a \mid 5k+1 \Rightarrow 5k+1 = 3aq_2 \xrightarrow{\times 4} 20k+4 = 3aq_2 \end{array} \right\} (0/25) \Rightarrow \underbrace{6 = 3aq_1}_{(0/25)} \Rightarrow \underbrace{2 = aq_1}_{(0/25)} \Rightarrow \underbrace{a=2}_{(0/25)}$$

صفحه ۱۲

$$\left. \begin{array}{l} 35x \equiv 50 - 2x \pmod{11} \Rightarrow 37x \equiv 50 \pmod{11} \\ (37, 11) \mid 50 \Rightarrow \underbrace{4x \equiv 6 \pmod{11}}_{(0/25)} \Rightarrow \underbrace{2x \equiv 3 \pmod{11}}_{(0/25)} \Rightarrow \underbrace{2x \equiv 14 \pmod{11}}_{(0/25)} \Rightarrow \underbrace{x \equiv 7 \pmod{11}}_{(0/25)} \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \underbrace{x = 11k + 7}_{(0/25)} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

صفحه ۲۵

$$\underbrace{6 + 3(3) + 2(30) + 10}_{(0/25)} \equiv \underbrace{-1 + 2 + 4 + 3}_{(0/25)} \pmod{7}$$

ش	ج	پ	چ	س	د	ی
۶	۵	۴	۳	۲	۱	۰

رسم جدول (۰/۲۵)

۱۰ آذرماه دوشنبه است. (۰/۲۵)

تذکر: در صورتی که بدون رسم جدول، جواب نهایی درست باشد (۰/۵) نمره تعلق گیرد.

صفحه ۲۴

الف) $V(G) = \{a, b, c, d, e, f\}$ (۰/۲۵) و $q=7$ (۰/۲۵)

ب) $adceb$ یا $acdeb$ (۰/۵)

پ) $cbedc$ یا $cdebac$ (۰/۵)

ت) $x=a$ ، $x=e$ (۰/۲۵)

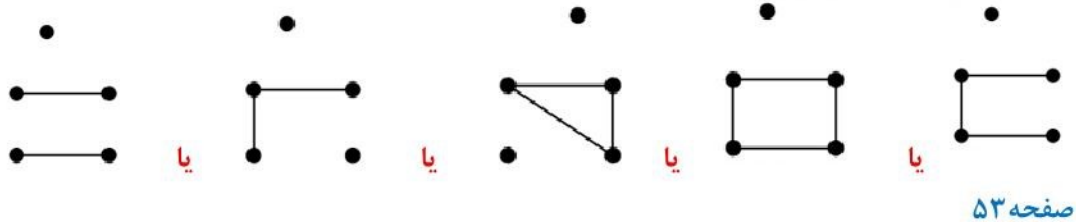
صفحه ۴۱

صفحه ۲ از ۵

۰/۷۵	<p>روش اول:</p> $\underbrace{2q = 40 \Rightarrow q = 20}_{(0/25)} \text{ و } \underbrace{q(G) + q(\bar{G}) = \frac{p(p-1)}{2} \Rightarrow 20 + q(\bar{G}) = 28}_{(0/25)} \Rightarrow \underbrace{q(\bar{G}) = 8}_{(0/25)}$ <p>روش دوم:</p> <p>مجموع درجات گراف کامل: $\sum \deg_{K_p}(v_i)$</p> $\underbrace{\sum \deg_G(v_i) + \sum \deg_{\bar{G}}(v_i) = \sum \deg_{K_p}(v_i) \Rightarrow 40 + \sum \deg_{\bar{G}}(v_i) = 56}_{(0/25)}$ $\Rightarrow \underbrace{\sum \deg_{\bar{G}}(v_i) = 16}_{(0/25)} \Rightarrow \underbrace{2q(\bar{G}) = 16 \Rightarrow q(\bar{G}) = 8}_{(0/25)}$ <p>صفحه ۳۸</p>	۱۰
۱	$\begin{cases} 3p = 2q \Rightarrow q = \frac{3}{2}p & (0/5) \\ p + q = 20 \end{cases} \Rightarrow \underbrace{p = 8, q = 12}_{(0/5)}$ <p>صفحه ۳۵</p>	۱۱
۱/۵	<p>(الف)</p> <p>روش اول:</p> $\underbrace{\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{p}{\Delta+1} \right\rceil \Rightarrow \gamma(G) \geq \left\lceil \frac{8}{4} \right\rceil \Rightarrow \underbrace{\gamma(G) \geq 2}_{(0/25)} \left. \vphantom{\gamma(G) \geq 2} \right\} \Rightarrow \underbrace{\gamma(G) = 2}_{(0/25)}$ <p>$A = \{b, h\}$ (0/25)</p> <p>روش دوم:</p> <p>چون هیچ رأسی در گراف G وجود ندارد که تمام رئوس را احاطه کند، پس عدد احاطه‌گری نمی‌تواند یک باشد (0/5)</p> <p>از طرفی مجموعه دو عضوی $A = \{b, h\}$ یک مجموعه احاطه‌گر است (0/25) لذا $\gamma(G) = 2$ (0/25)</p> <p>تذکر: برای هر مجموعه احاطه‌گر دو عضوی دیگر به جای مجموعه احاطه‌گر A، نمره تعلق گیرد.</p> <p>صفحه ۴۹</p> <p>(ب) $\{a, b, c, d\}$ یا $\{a, f, c, h\}$ (0/5)</p> <p>صفحه ۴۶</p>	۱۲

به رسم یک گراف از گراف‌های زیر (۰/۵) نمره تعلق گیرد.

۰/۵



۱۳

(الف)

۱

$$\frac{\binom{0/25}{8!}}{\binom{0/5}{4! \times 2! \times 2!}} = 420 \quad (0/25)$$

روش اول:

روش دوم:

$$\binom{0/75}{\binom{8}{4} \binom{4}{2} \binom{2}{2}} = 420 \quad (0/25) \quad \text{یا} \quad \binom{0/75}{\binom{8}{2} \binom{6}{2} \binom{4}{2}} = 420 \quad (0/25) \quad \text{یا} \quad \binom{0/75}{\binom{8}{2} \binom{6}{4} \binom{2}{2}} = 420 \quad (0/25)$$

صفحه ۵۹

(ب)

روش اول:

n : تعداد توابع پوشا

$$n = 3^m - (3 \times 2^m - 3) \xrightarrow{m=5} 3^5 - (3 \times 2^5 - 3) = 243 - 93 = 150 \quad (0/25)$$

روش دوم:

$|S|$: تعداد کل توابع از یک مجموعه ۵ عضوی به یک مجموعه ۳ عضوی
 $|A_1| = |A_2| = |A_3|$: تعداد توابعی که فقط شامل دو عضو از برد باشند

$$|S| = 3^5 = 243$$

$$|A_1| = |A_2| = |A_3| = 2^5 = 32$$

$$|A_1 \cap A_2| = |A_1 \cap A_3| = |A_2 \cap A_3| = 1$$

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 0$$

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |S| - |A_1 \cup A_2 \cup A_3| = 243 - (3 \times 32 - 3 \times 1 + 0) = 150 \quad (0/25)$$

صفحه ۸۳

صفحه ۴ از ۵

۱/۵	$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 8, \quad x_5 = 1, \quad x_1 \geq 2 \Rightarrow \underbrace{x_1 - 2}_{t_1} \geq 0 \quad (0/25)$ $t_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 8 - 2 - 1 = 5 \quad (0/5) \Rightarrow \underbrace{\binom{n+k-1}{k-1}}_{(0/5)} = \binom{8}{3} = 56 \quad (0/25)$	۱۵	صفحه ۷۱
۱	$t = 1 \quad (0/25), \quad x = 1 \quad (0/25), \quad z = 3 \quad (0/25), \quad y = 2 \quad (0/25)$	۱۶	صفحه ۶۲
۱/۵	<p>S: تعداد اعداد طبیعی کوچک‌تر یا مساوی ۶۰۰</p> <p>A: تعداد اعداد طبیعی کوچک‌تر یا مساوی ۶۰۰ که بر ۳ بخش پذیرند.</p> <p>B: تعداد اعداد طبیعی کوچک‌تر یا مساوی ۶۰۰ که بر ۷ بخش پذیرند.</p> <p>$A \cap B$: تعداد اعداد طبیعی کوچک‌تر یا مساوی ۶۰۰ که بر ۲۱ بخش پذیرند.</p> $ A \cup B = A + B - A \cap B = \left[\frac{600}{3} \right] + \left[\frac{600}{7} \right] - \left[\frac{600}{21} \right] = 200 + 85 - 28 = 257 \quad (0/25)$ $\underbrace{ A \cup B }_{(0/25)} = S - A \cup B = 600 - 257 = 343 \quad (0/25)$	۱۷	صفحه ۶۳
۱	<p>روش اول:</p> <p>n: تعداد لانه‌ها (ماه‌های سال) ، $k+1$: حداقل کبوترها (دانش‌آموزان دبیرستان)</p> $k+1 = 21 \Rightarrow k = 20 \quad (0/25)$ $\underbrace{nk+1}_{(0/5)} = 12 \times 20 + 1 = 241 \quad (0/25)$ <p>روش دوم:</p> <p>m: حداقل تعداد دانش‌آموزان دبیرستان</p> $\underbrace{m = 12 \times 20 + 1}_{(0/25)} = 241 \quad (0/25)$ <p>به کمک عمل تقسیم داریم:</p> <p>روش سوم:</p> <p>t: تعداد دانش‌آموزان دبیرستان ، $k+1$: حداقل کبوترها (دانش‌آموزان دبیرستان)</p> $\left[\frac{t-1}{k} \right] = n \Rightarrow \left[\frac{t-1}{20} \right] = 12 \Rightarrow 12 \leq \frac{t-1}{20} < 13 \Rightarrow t \geq 241$	۱۸	بنابراین حداقل تعداد دانش‌آموزان دبیرستان ۲۴۱ نفر است. (۰/۲۵)
۲۰	جمع	موفق باشید	صفحه ۵ از ۵