

نام و نام خانوادگی:	رشته: ریاضی - فیزیک	تعداد صفحه: ۲	سؤالات امتحان نهایی درس: ریاضیات گسسته
مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه	تاریخ امتحان: ۱۴۰۱/۰۶/۰۶	ساعت شروع: ۸ صبح	پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه
مرکز سنجش و پایش کیفیت آموزشی		دانش آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور در نوبت شهریور ماه سال ۱۴۰۱	

ردیف	سؤالات پاسخ نامه دارد. (استفاده از ماشین حساب ساده، با چهار عمل اصلی، مجاز است).	نمره
------	-------------------------------------------------------------------------------------	------

۱	هر یک از گزاره های زیر را اثبات و یا با ارائه مثال نقض کنید. الف) برای هر عدد طبیعی n ، عدد $1 + 2^n$ اول است. ب) مربع هر عدد فرد، عددی فرد است.	۱
۱/۲۵	a_1, a_2, a_3 اعدادی صحیح هستند و b_1, b_2, b_3 هم همان اعداد ولی به ترتیب دیگری قرار گرفته اند. ثابت کنید $(a_1 - b_1)(a_2 - b_2)(a_3 - b_3)$ عددی زوج است.	۲
۰/۷۵	اگر عدد طبیعی a ، دو عدد $(\Delta k + 9)$ و $(\Lambda k + 13)$ را عاد کند، ثابت کنید: $a = 1$ یا $a = 7$.	۳
۱	اگر باقیمانده تقسیم عدد a بر دو عدد ۶ و ۷ به ترتیب ۳ و ۵ باشد، باقیمانده تقسیم عدد a را بر ۴۲ بیابید.	۴
۱/۲۵	ثابت کنید باقیمانده تقسیم هر عدد بر ۹، برابر است با باقیمانده تقسیم مجموع ارقام آن عدد بر ۹.	۵
۱/۷۵	دانش آموزی در یک آزمون علمی شرکت کرده است، او به سؤالات ۵ امتیازی و ۳ امتیازی پاسخ داده و مجموعاً ۴۲ امتیاز کسب کرده است. (پاسخ به هر سؤال یا امتیاز کامل دارد و یا امتیازی ندارد). این دانش آموز به چه صورت هایی توانسته این امتیاز را کسب کند؟	۶
۲/۲۵	با توجه به گراف (G) (شکل مقابل) به سؤالات زیر پاسخ دهید. الف) یک مسیر به طول ۳ از a به c بنویسید. ب) یک دور به طول ۴ مشخص کنید. پ) درجه رأس a را در گراف \bar{G} تعیین کنید. ت) آیا گراف G همبند است؟ (با ذکر دلیل) ث) $N_G[f]$ را بنویسید.	۷
		
۱	به سؤالات زیر پاسخ داده و برای آنها دلیل ارائه کنید. الف) یک گراف کامل ۱۱ رأسی چند یال دارد؟ ب) در یک گراف از مرتبه ۸ با $\Delta = 3$ ، حداقل چند رأس برای احاطه همه رئوس لازم است؟	۸
۱/۵	به سؤالات زیر پاسخ دهید: الف) گراف C_8 را رسم کنید. ب) یک γ - مجموعه از آن مشخص کنید. پ) یک مجموعه احاطه گر مینیمال ۴ - عضوی از آن را مشخص کنید.	۹
ادامه سؤالات در صفحه دو		

نام و نام خانوادگی:	رشته: ریاضی - فیزیک	تعداد صفحه: ۲	سؤالات امتحان نهایی درس: ریاضیات گسسته
مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه	تاریخ امتحان: ۱۴۰۱/۰۶/۰۶	ساعت شروع: ۸ صبح	پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه
دانش آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور در نوبت شهریور ماه سال ۱۴۰۱ مرکز سنجش و پایش کیفیت آموزشی			

نمره	سؤالات پاسخ نامه دارد. (استفاده از ماشین حساب ساده، با چهار عمل اصلی، مجاز است.)	ردیف
------	--------------------------------------------------------------------------------------	------

۱/۲۵	<p>با توجه به گراف (G) به سؤالات زیر پاسخ دهید. الف) عدد احاطه گری را برای گراف زیر مشخص کنید. ب) یک مجموعه احاطه گر مینیمال مشخص کنید که مینیمم نباشد.</p> <p style="text-align: center;">(G)</p>	۱۰
۱	به چند طریق می توان ۴۵ دانش آموز را در چهار کلاس ۸ نفره، ۱۰ نفره، ۱۲ نفره و ۱۵ نفره در یک مدرسه قرار داد؟	۱۱
۱	برای کنار هم قرار گرفتن ۴ دانش آموز پایه دوازدهم و ۶ دانش آموز پایه یازدهم مسئله ای طرح کنید که پاسخ آن $4! \times 7!$ باشد.	۱۲
۱/۵	تعداد جواب های صحیح و نامنفی معادله زیر را با شرایط داده شده به دست آورید. $x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 9 \quad (x_i \geq 0 \text{ و } 1 \leq i \leq 4 \text{ و } x_5 = 2)$	۱۳
۱/۲۵	دومربع لاتین متعامد 3×3 را بنویسید. (دلیل متعامد بودن آنها را بیان کنید).	۱۴
۱/۲۵	تعداد توابع یک به یک، از یک مجموعه ۵ عضوی به یک مجموعه ۷ عضوی را به دست آورید. (راه حل نوشته شود)	۱۵
۱	حداقل چند نقطه از داخل مثلثی متساوی الاضلاع به طول ضلع ۲، انتخاب کنیم تا مطمئن باشیم حداقل دو نقطه از آنها فاصله شان کمتر از ۱ است؟	۱۶
۲۰	جمع نمره	" موفقی باشید "

راهنمای تصحیح امتحان نهایی درس: ریاضیات گسسته		رشته: ریاضی فیزیک		ساعت شروع: ۸ صبح		مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه	
پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه				تاریخ امتحان: ۱۴۰۱/۰۶/۰۶			
دانش آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور شهریور ماه سال ۱۴۰۱				مرکز سنجش و پایش کیفیت آموزشی			
ردیف	راهنمای تصحیح						نمره
۱	الف) نادرست، مثال نقض $n=3$ (۰/۵) (مشابه کاردرکلاس صفحه ۳) ب) درست (۰/۲۵)، اثبات: $a = 2k + 1 \Rightarrow a^2 = (2k + 1)^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1 = 2k^2 + 1$ (۰/۲۵) (تمرین صفحه ۸)						۱
۲	اگر $(a_1 - b_1)(a_2 - b_2)(a_3 - b_3)$ زوج نباشد (فرض خلف) پس عددی فرد است، (۰/۲۵) پس هر سه عامل $(a_1 - b_1)$ و $(a_2 - b_2)$ و $(a_3 - b_3)$ هم باید فرد باشند، (۰/۲۵) در نتیجه مجموع آنها هم باید فرد باشد. (۰/۲۵) اما با توجه به فرض مسأله: مجموع این سه عبارت برابر صفر است که عددی زوج است، (۰/۲۵) با توجه به تناقض ایجاد شده، فرض خلف باطل و حکم ثابت می شود. (۰/۲۵) (مثال صفحه ۶)						۱/۲۵
۳	$\begin{cases} a \mid 5k + 9 & a \mid 40k + 72 & (0/25) \\ a \mid 8k + 13 & a \mid 40k + 65 & (0/25) \end{cases} \Rightarrow a \mid 7 & (0/25) \Rightarrow a = 1 \vee a = 7$ (مشابه مثال ۳ صفحه ۱۲)						۰/۷۵
۴	$\begin{aligned} a = 6q + 3 & \quad (0/25) \Rightarrow 7a = 42q + 21 \\ a = 7q' + 5 & \quad (0/25) \Rightarrow 6a = 42q' + 30 \end{aligned} \Rightarrow a = 42(q - q' - 1) + 33 \quad (0/25) \Rightarrow r = 33 \quad (0/25)$ (مشابه مثال صفحه ۱۴)						۱
۵	عدد n رقمی $A = a_{n-1}a_{n-2} \dots a_0$ را بسط می دهیم (۰/۲۵) و در هم نهشتی به پیمانه ۹ به جای هر توان ۱۰ عدد ۱ را قرار می دهیم (۰/۲۵)، داریم: (فعالیت صفحه ۲۲). $A = 10^{n-1} \times a_{n-1} + \dots + 10^1 a_1 + 10^0 a_0 \Rightarrow A \equiv 1 \times a_{n-1} + \dots + 1 \times a_1 + a_0 \Rightarrow A \equiv a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0$ (۰/۲۵)						۱/۲۵
۶	$\begin{aligned} 5x + 3y = 42 & \Rightarrow 5x \equiv 42 \equiv 0 \pmod{3} \Rightarrow x \equiv 0 \pmod{3} \Rightarrow x = 3k & \Rightarrow 5(3k) + 3y = 42 & \Rightarrow y = -5k + 14 \end{aligned}$ $\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 14 \end{cases} \pmod{3}; \begin{cases} x = 3 \\ y = 9 \end{cases} \pmod{3}; \begin{cases} x = 6 \\ y = 4 \end{cases} \pmod{3}$ (مشابه مثال صفحه ۲۸)						۱/۷۵
۷	الف) $abgc$ (۰/۵) (تعریف مسیر صفحه ۳۸) ب) $bcgdb$ (۰/۵) (تعریف دور صفحه ۳۸) پ) ۵ (۰/۲۵) (مسأله صفحه ۳۷) ت) خیر (۰/۲۵) زیرا دارای رأس ایزوله است (هیچ مسیری از f به سایر رئوس وجود ندارد). (۰/۲۵) (تعریف گراف همبند صفحه ۳۹) ث) $N_G[f] = \{f\}$ (۰/۵) (مشابه مثال صفحه ۳۶)						۲/۲۵
۸	الف) (مسئله ۱ صفحه ۳۸) $\frac{p(p-1)}{2} = \frac{11(11-1)}{2} = 55 \quad (0/5)$ ب) (صفحه ۴۹) $\left \frac{n}{\Delta+1} \right = \left \frac{8}{3+1} \right = 2 \quad (0/5)$						۱

راهنمای تصحیح امتحان نهایی درس: ریاضیات گسسته	رشته: ریاضی فیزیک	ساعت شروع: ۸ صبح	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه
پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه		تاریخ امتحان: ۱۴۰۱/۰۶/۰۶	
دانش آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور شهریور ماه سال ۱۴۰۱		مرکز سنجش و پایش کیفیت آموزشی	

ردیف	راهنمای تصحیح	نمره																		
۹	الف) رسم گراف C_8 (صفحه ۳۸) ب) $D = \{a, d, g\}$ (تعریف صفحه ۴۴) پ) $\{a, c, e, g\}$: یک مجموعه احاطه گر مینیمال (صفحه ۴۶)	۱/۵																		
۱۰	الف) $\{g, c\} \Rightarrow \gamma(G) = 2$ (مشابه تمرین ۳ صفحه ۵۲) ب) $\{h, d, b\}$ (صفحه ۴۶)	۱/۲۵																		
۱۱	در صورتی که جواب را به فرم $\frac{45!}{8! \times 10! \times 12! \times 15!}$ هم نوشتند، نمره داده شود. (مثال صفحه ۵۹)	۱																		
۱۲	۴ دانش آموز پایه دوازدهم و ۶ دانش آموز پایه یازدهم را به چند طریق می توان در یک ردیف (کنار هم) قرار داد به طوری که همواره دانش آموزان پایه دوازدهم در کنار هم باشند. (نمره) (با توجه به باز پاسخ بودن سؤال، به پاسخ های صحیح دیگر نمره داده شود) (تمرین صفحه ۷۱)	۱																		
۱۳	$x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 + 2 = 9 \Rightarrow x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 = 7$ (۰/۲۵) $x_2 = 0 \Rightarrow x_1 + x_3 + x_4 = 7$ (۰/۲۵) $\Rightarrow \binom{7}{2} = 21$ (۰/۲۵) $\Rightarrow 21 + 10 = 31$ (۰/۲۵) $x_2 = 1 \Rightarrow x_1 + x_3 + x_4 = 6$ (۰/۲۵) $\Rightarrow \binom{6}{2} = 15$ (۰/۲۵) (مشابه سوال ۹ صفحه ۷۱)	۱/۵																		
۱۴	الف) به هر کدام از مربع های لاتین مانند نمونه زیر (۰/۵) نمره . متعامدند چون در مربع ترکیبی عدد تکراری نداریم. (۰/۲۵) (صفحه ۶۴)	۱/۲۵																		
	<table border="1" style="display: inline-table; margin-right: 20px;"> <tr><td>۱</td><td>۲</td><td>۳</td></tr> <tr><td>۲</td><td>۳</td><td>۱</td></tr> <tr><td>۳</td><td>۱</td><td>۲</td></tr> </table> <table border="1" style="display: inline-table;"> <tr><td>۳</td><td>۱</td><td>۲</td></tr> <tr><td>۲</td><td>۳</td><td>۱</td></tr> <tr><td>۱</td><td>۲</td><td>۳</td></tr> </table>	۱	۲	۳	۲	۳	۱	۳	۱	۲	۳	۱	۲	۲	۳	۱	۱	۲	۳	
۱	۲	۳																		
۲	۳	۱																		
۳	۱	۲																		
۳	۱	۲																		
۲	۳	۱																		
۱	۲	۳																		
۱۵	اگر فرض کنیم $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ و $B = \{b_1, b_2, b_3, \dots, b_7\}$ (۰/۲۵)، برای تعریف f روی هر عضو A ، 7 انتخاب داریم (۰/۲۵)، بنابراین طبق اصل ضرب (۰/۲۵) تعداد کل تابع های یک به یک برابر است با $\frac{7!}{2!} = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3$ (۰/۲۵) (اگر دانش آموزی از فرمول $(7)_2 = \frac{7!}{2!}$ پاسخ دهد نمره کامل داده شود). (مشابه مثال صفحه ۷۸)	۱/۲۵																		
۱۶	۵ نقطه را کیبوتر (۰/۲۵) و ۴ مثلث کوچک را لانه (۰/۲۵) در نظر می گیریم. طبق اصل لانه کیبوتری (۰/۲۵) $(4 < 5)$ حداقل یک لانه (مثلث) وجود دارد که دو نقطه (کیبوتر) در آن قرار می گیرد. (۰/۲۵) (مشابه مثال صفحه ۸۲)	۱																		
۲۰	جمع نمره																			

«همکاران گرامی لطفا برای راه حل های صحیح دیگر بارم را به تناسب تقسیم فرمایید.»